以下の内容に取り組んでください。

①教科書　Ｐ１９３～Ｐ２０３　　※練習の解答をアップしています。

②Ｓｔｅｐ－Ｕｐノート　Ｐ１４３～Ｐ１５５

## ［324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習1］

$C$は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int x^5dx=\frac{1}{5+1}x^{5+1}+C=\frac{1}{6}x^6+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

(4) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

(5) $\displaystyle\int\sqrt[4]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$

## ［324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習2］

$C$は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2-4x+1}{x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\log|x|+\frac{4}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}dx=\int\frac{x^4-5x^2+6}{x^4}dx=\int\left(1-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^4}\right)dx$

$\displaystyle=x+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^3}+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx=\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=x-4\sqrt{x}+\log x+C$

(5) $\displaystyle\int\frac{1-y-y^2}{y^2}dy=\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}-1\right)dy=-\frac{1}{y}-\log|y|-y+C$

(6) $\displaystyle\int\left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2dt=\int\left(9t^4-6t+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{9}{5}t^5-3t^2-\frac{1}{t}+C$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習3]

$C$ は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(\cos x-2\sin x)dx=\sin x+2\cos x+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{2\cos^3x-1}{\cos^2x}dx=\int\left(2\cos x-\frac{1}{\cos^2x}\right)dx=2\sin x-\tan x+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta-1}=-\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=-\tan\theta+C$

(4) $\displaystyle\int(2-\tan\theta)\cos\theta\,d\theta=\int(2\cos\theta-\sin\theta)d\theta=2\sin\theta+\cos\theta+C$

(5) $\displaystyle\int5^xdx=\frac{5^x}{\log5}+C$

(6) $\displaystyle\int(3^x-2e^x)dx=\frac{3^x}{\log3}-2e^x+C$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習4]

$C$ は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^4dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x+1)^5+C=\frac{1}{15}(3x+1)^5+C$

(2) $\displaystyle\int(4x-3)^{-3}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-2}(4x-3)^{-2}+C=-\frac{1}{8}(4x-3)^{-2}+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}=\int(1-2x)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-2}\cdot2(1-2x)^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{1-2x}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x+1}=\frac{1}{2}\log|2x+1|+C$

(5) $\displaystyle\int\sin2x\,dx=\frac{1}{2}(-\cos2x)+C=-\frac{1}{2}\cos2x+C$

(6) $\displaystyle\int e^{3x-1}dx=\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習5]

$x+1=t$ とおくと　　$x=t-1$，$dx=dt$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\int(t-1)\sqrt{t}\,dt=\int(t\sqrt{t}-\sqrt{t})dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}(3t-5)+C$$

$$=\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C\quad(C\text{は積分定数})$$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習6]

$C$は積分定数とする。

(1) $\sqrt{2x-1}=t$ とおくと　　$x=\dfrac{t^2+1}{2}$, $dx=tdt$

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx=\int \frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot tdt=\frac{1}{2}\int (t^4+t^2)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}t^3(3t^2+5)+C$$

$$=\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$$

(2) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　　$x=t^2-1$, $dx=2tdt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt=2\int (t^2-1)dt$$

$$=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{2}{3}t(t^2-3)+C$$

$$=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+C$$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習7]

$C$は積分定数とする。

(1) $x^3+2=u$ とおくと　　$3x^2dx=du$

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx=\frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+2}\cdot 3x^2dx=\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}u\sqrt{u}+C$$

$$=\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C$$

(2) $\sin x=u$ とおくと　　$\cos x\,dx=du$

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx=\int u^3du=\frac{u^4}{4}+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

(3) $\log x=u$ とおくと　　$\dfrac{1}{x}dx=du$

$$\int \frac{\log x}{x}dx=\int udu=\frac{u^2}{2}+C=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習8]

$C$は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx=\int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1}dx=\log|x^2+x-1|+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\log(e^x+1)+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\log|\sin x|+C$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習9]

$C$ は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx=\int x(-\cos x)'dx=x(-\cos x)-\int (x)'\cdot(-\cos x)dx$

$\displaystyle=-x\cos x+\int\cos x\,dx$

$\displaystyle=-x\cos x+\sin x+C$

(2) $\displaystyle\int xe^x dx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int (x)'e^x dx$

$\displaystyle=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

$\displaystyle=(x-1)e^x+C$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習10]

$C$ は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int \log 2x\,dx=\int(\log 2x)\cdot(x)'dx=(\log 2x)\cdot x-\int(\log 2x)'\cdot x dx$

$\displaystyle=x\log 2x-\int\frac{2}{2x}\cdot x dx$

$\displaystyle=x\log 2x-x+C$

(2) $\displaystyle\int \log x^2 dx=\int(\log x^2)\cdot(x)'dx=(\log x^2)\cdot x-\int(\log x^2)'\cdot x dx$

$\displaystyle=x\log x^2-\int\frac{2x}{x^2}\cdot x dx$

$\displaystyle=x\log x^2-2x+C$

(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot(\log x)'dx$

$\displaystyle=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習11]

等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ を掛けて　　$x=a(x+2)+b(x+1)$

よって　　$x=(a+b)x+(2a+b)$

これが $x$ についての恒等式であるから，両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$a+b=1,\ 2a+b=0$

これを解いて　　$a=-1,\ b=2$

したがって　　$\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=-\log|x+1|+2\log|x+2|+C$

$\displaystyle=\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$　($C$ は積分定数)

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習12]

$C$ は積分定数とする。

(1) $\dfrac{x^2-1}{x+2}=x-2+\dfrac{3}{x+2}$ であるから

$$\int\frac{x^2-1}{x+2}dx=\int\left(x-2+\frac{3}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+3\log|x+2|+C$$

(2) $\dfrac{4x^2}{2x-1}=2x+1+\dfrac{1}{2x-1}$ であるから

$$\int\frac{4x^2}{2x-1}dx=\int\left(2x+1+\frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$=x^2+x+\frac{1}{2}\log|2x-1|+C$$

(3) $\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$ とする。

等式の両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けて　　$3=a(x+2)+b(x-1)$

よって　　$3=(a+b)x+(2a-b)$

これが $x$ についての恒等式であるから，両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$a+b=0,\ 2a-b=3$$

これを解いて　　$a=1,\ b=-1$

したがって

$$\int\frac{3}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\log|x-1|-\log|x+2|+C$$

$$=\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$$

## [324改訂版 新編 数学Ⅲ 練習13]

$C$ は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin2x+C$

(2) $\displaystyle\int\sin^2 3x\,dx=\int\frac{1-\cos6x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin6x+C$

(3) $\displaystyle\int\sin x\cos x\,dx=\int\frac{\sin2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)+C=-\frac{1}{4}\cos2x+C$

(4) $\displaystyle\int\cos3x\cos2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos5x+\cos x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin5x+\sin x\right)+C$

$$=\frac{1}{10}\sin5x+\frac{1}{2}\sin x+C$$

(5) $\displaystyle\int\sin x\sin3x\,dx=-\frac{1}{2}\int(\cos4x-\cos2x)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin4x-\frac{1}{2}\sin2x\right)+C$

$$=-\frac{1}{8}\sin4x+\frac{1}{4}\sin2x+C$$